



TITLE:

# Boole値解析学と作用素環論(数学基礎論及びその応用)

AUTHOR(S):

Ozawa, Masanao

---

CITATION:

Ozawa, Masanao. Boole値解析学と作用素環論(数学基礎論及びその応用). 数理解析研究所講究録 1984, 540: 145-164

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98739>

RIGHT:

## Boole 値解析学と作用素環論

東工大・理 小澤 正直 (Masanao Ozawa)

### 1. 序論.

関数解析学には、無限次元の対象を扱い、その分類を目的とする理論がある。始めに、そのような分類に基盤概念が果たしている役割を眺めてみよう。最も基本的なものは Hilbert 空間論である。Hilbert 空間はその完全正規直交族が一意的な環度を持ち、その環度、即ち、次元によつて完全に分類される。von Neumann は、始めに Hilbert 空間論を定式化し、この事実を用いて、Heisenberg の行列力学と Schrödinger の波動力学の同値性を示した。次に現われるのは、Hilbert 空間上の正規作用素に関するスペクトル重複度理論である。Hilbert 空間が有限次元のユークリッド空間の拡張であるように、重複度理論は有限次元の正規行列のユークリッド同値の問題を Hilbert 空間上の正規作用素のユークリッド同値の問題に拡張する。有限次元の正規行列の完全な不変量が固有値とその重複度である

ように、正規作用素の  $E = I$  の同値の完全な不変量はスペクトルと重複度関数である。この理論で重要な点は、重複度というものが基数を用いて完全に記述できるということである。連続スペクトルの場合には、重複度関数の定義はかなり複雑であるが、簡単に言って、これはスペクトルの上で定義された、基数を値にとる階段関数で、その値は対応するスペクトルの点（固有値）の重複度を表わす。この理論は更に、可換な  $C^*$ -環の表現の  $E = I$  の同値の問題に容易に拡張される。その次に現われるのは  $I$  型の von Neumann 環の構造理論である。中心が 1 次元である von Neumann 環は因子環と呼ばれる。von Neumann は射影元の上で定義される次元関数の存在を示して、その値域が  $\{0, 1, 2, \dots\}$  となる  $I$  型、 $[0, 1]$  となる  $II$  型、 $[0, +\infty)$  となる  $III$  型、 $\{0, +\infty\}$  となる  $IV$  型の各型に因子環が分類される事を示した。これは、射影幾何学の無限次元への拡張とみなされ、特に、 $II$  型の場合を一般化して、連続幾何学が構成された。 $I$  型の因子環は次元関数の値域で構造が一気に決定される。値域が  $\{0, 1, \dots, n\}$  の場合には、それは  $n \times n$  行列環と同型であり、一般に与えられた次元の Hilbert 空間上の有界作用素の全体と同型である。さて、中心が一般の場合の  $I$  型の von Neumann 環は次のように分類される。先ず、 $I$  型の von Neumann 環は、交換子環（与えられた作用素環の  $2$

ベの元と可換な作用素の左体) が可換になるように Hilbert  
 空間上に表現することが出来る。そこで, この可換環に前  
 述の重複度理論を適用すると, 一樣重複度をもつ中心射影  
 の直交族が得られる。この直交族を用いて, 左体を直和分解  
 すると, 各直和因子が homogeneous 環であるような直和分解  
 が得られ, homogeneous 環は対応する射影の重複度から決まる  
 degree とよばれる基数によって, 構造が一気に決定される  
 ので, この直和分解の一貫性から左体の構造が決定される。つ  
 まり, I 型の von Neumann 環の中心と中心のスベクトルに對  
 して定義された重複度関数の組が分類のたりの不変量で, こ  
 の不変量は homogeneous 環への直和分解の仕方と指定してい  
 る。従って, ここでも不変量が基数を用いて記述される。こ  
 の I 型の構造理論は, Kaplansky によって, 純代数的に構成  
 され, I 型の  $AW^*$ -環の構造理論に発展する。ところが, この  
 拡張には, 一つの明らかな障害が現れてくる。Kaplansky は  
 I 型  $AW^*$ -環が homogeneous な  $AW^*$ -環の直和に分解されること  
 を示したが, この分解の一貫性を示すことが出来なかつた [5]。  
 von Neumann 環の場合には homogeneous 環は degree によって構造  
 が一気に決定されるが,  $AW^*$ -環の場合には degree の一貫性の  
 問題が未解決の問題として残された。この問題を次の様に言  
 い替える。入を基数として, 可換 von Neumann 環を成分

とする  $\lambda \times \lambda$  行列環は  $\lambda$  が異なれば同型では有りが、可換 AW-環を成命とする  $\lambda$  が異なっても同型になりうるのでは無いかという事である。この事は、基数  $\lambda$  が同型の不変量になりえない可能性を示唆し、ここから始めて、不変量を基数を用いて記述することには挫折が起るものである。

一方、集合論の世界では Cohen による forcing の発見と Boolean model の研究により、2、基数に関する研究が飛躍的に進歩した。一言で言、2、基数というものが非常に相対的な概念であって、普遍類の拡張により、2簡単に变化しうるものである事が発見された。このようにして、今や連続体の環度と全く任意に選べるように model を構成することができた。そして、基数に関するこの新しい知見から前述の I 型の構造理論を新しい見地から見直して、新たな前進を果たすことができたのではないか。以下の各節で、論を進めてみよう。前述の基数の一貫性については、次の様な結論が得られる。基数  $\lambda$  を  $K$  を collapse した forcing condition から完備 Boolean 代数  $B$  を作り、 $B$  を射影元の体とする可換 AW-環を構成すると、これは成命とする  $\lambda \times \lambda$  行列環と  $K \times K$  行列環は同型になる。これは、前述の基数が  $B$  を用いて構成された対象に対しては見かけの基数であり、2同型の不変量になり得ないことを示している。この様な対象に対して本質的な基数概念は  $\mathcal{D}^{(B)}$  になり

る基数であって、同型の不変量を  $\mathcal{D}^{(B)}$  の基数概念を用いて構成する必要がある。これでは、この von Neumann 環の場合には何故  $\mathcal{D}^{(B)}$  の基数を用いるに理論が成功したのであるのか。その解答は、von Neumann 環の場合には対応する  $B$  が measure algebra であるので、 $\mathcal{D}^{(B)}$  の基数概念は絶対的であり、したがって、 $\mathcal{D}$  の基数概念で十分であったのである。

## 2. 重複度理論.

始めに、 $B$  を measure algebra とし、 $\mathcal{D}^{(B)}$  の基数について考えてみよう。この時、基数概念は絶対的であって、 $\lambda \in \mathcal{D}^{(B)}$  の基数とすると、 $\lambda = \sum \alpha \epsilon_\alpha$  の形に表現される。ここで、 $\alpha$  は  $\mathcal{D}$  の基数であり、 $\epsilon_\alpha = \mathbb{I} \lambda = \alpha \mathbb{I}$  で、 $\epsilon_\alpha$  は  $B$  の単位の分解を構成する。ところで、 $\sum \alpha \epsilon_\alpha$  の形をした数学的対象は  $\mathcal{D}^{(B)}$  の基数として始めて登場したのである。実は、重複度関数というものがこれと同じ形のモノとして最初に数学に登場したものである。簡単にいえば、対角行列  $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix}$  の重複度というものを考えてみよう。スペクトルは  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  の2点集合であり、 $B$  としてその中集合を考える。固有値  $\lambda_1$  の重複度が2で  $\lambda_2$  の重複度が1であるから、単位の分解  $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  (但し、 $\epsilon_1 = \{\lambda_1\}$ ,  $\epsilon_2 = \{\lambda_2\}$ ) に対してこの行列のスペクトルの重複度は  $2 \cdot \epsilon_1 + 1 \cdot \epsilon_2$  と表現できる。これは次の事の意味して

いる。与えられた対角行列は3次元ユークリッド空間に作用していると考えられるが、これは、固有値  $\lambda_1$  に対応する2次元部分空間と固有値  $\lambda_2$  に対応する1次元部分空間の直和に分解され、この行列の作用は各部分空間に対して、スカラー  $\lambda_i$  を掛ける作用と同等である。そこで、この行列の多項式の左体の作用を考えれば、右の部分では2次元ユークリッド空間のスカラー倍と同等になり、左の部分では1次元ユークリッド空間のスカラー倍と同等になるような作用の左体と一致する。つまり、このような作用は、部分的に2次元で部分的に1次元であるようなユークリッド空間のスカラーによる作用になっている。このような解釈から、この行列の作用が、 $V^{(R)}$  の  $\lambda = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2$  次元ユークリッド空間におけるスカラー倍に対応していることが、直ちに見てとれるであろう。この解釈は、無限次元への移行の際123の3を拡張される。結論として、Hilbert空間上の正規作用素の作用は、部分的に  $n$  次元の Hilbert 空間のスカラー倍と一致であるように分解され、その分解の指標が  $\lambda_1 \cdot b_1$  の形で書ける。ここで、 $b_i$  はスペクトル射影からなる単位の分割とみなされる。従って、部分的に多様な次元をもつ Hilbert 空間という概念が、このような正規作用素から生成される可換 von Neumann 環の Hilbert 空間への作用とみなされるようになるのである。我々が重複度理論を理解するためには

要件事のすべしは、部分的に多様な次元をもつ Hilbert 空間という概念を理解することになるのである。そして、これが  $\mathcal{D}^{(B)}$  における Hilbert 空間論に他ならないのである。

$\mathcal{D}^{(B)}$  における Hilbert 空間を最初に扱ったのは Takeuti [13] であるが、以下 Ozawa [7] に従って、概観を与えよう。従来の重複度理論は Halmos [3] に詳しく展開されている。

$(\Omega, \mu)$  を有限測度空間、 $\mathcal{B}$  をその測度代数とする。  $H$  を  $\mathcal{D}^{(B)}$  における Hilbert 空間としよう。  $H$  の  $\mathcal{D}^{(B)}$  における次元を  $\dim(H)_B = \lambda$  とする。  $\lambda = \sum \alpha_i b_i$  と分解されたとき、  $\alpha_i b_i$  の部分が  $\alpha_i$  次元であるような部分的に多様な次元をもつ Hilbert 空間である。  $\mathcal{D}^{(B)}$  における標素数の全体  $\mathcal{C}^{(B)}$  は  $(\Omega, \mu)$  上の可測関数の全体と  $\mu$ -a.e. の範囲で一対一に対応する。 符  $\|\cdot\|$  の有界なもの全体の  $\mathcal{C}_\infty^{(B)} = \{u \in \mathcal{C}^{(B)} \mid \exists r \in \mathbb{R} \ \|u\| < r\} = 1\}$  は有界可測関数の空間  $L^\infty(\Omega, \mu)$  と同型になり、これは可換 von Neumann 環である。 次は、  $H$  が  $L^\infty(\Omega, \mu)$  のある Hilbert 空間への作用に付いていふ事を示そう。  $H^{(B)} = \{u \in \mathcal{D}^{(B)} \mid \|u\| = 1\}$  とすると、  $H^{(B)}$  は加群で、  $\alpha \in \mathcal{C}$  に対して、  $\alpha$  に付する  $\alpha$ -倍と  $\alpha$  に付する  $\mathcal{D}^{(B)}$  での  $\alpha$ -倍とすれば、  $\mathcal{C}$  上の線形空間になる。 また、  $\lambda, \mu \in H^{(B)}$  ならば、  $\mathcal{D}^{(B)}$  における内積  $\langle \lambda, \mu \rangle$  は  $\mathcal{C}^{(B)}$  の元、即ち、可測関数である。 そして、  $\lambda, \mu$  が  $L^2(\Omega, \mu)$  に属するものの全体を  $H_2^{(B)}$  としよう、  $\lambda, \mu \in H_2^{(B)} = \{\lambda \in H^{(B)} \mid$



$\|f\|_B \in L^2(\Omega, \mu)\}$ . この時,  $\mathcal{D}^{(B)}$  における Schwarz の不等式  
 $\langle f|g \rangle_B \leq \|f\|_B \|g\|_B$  から  $\mathcal{D}^{(B)}$  における内積  $\langle f|g \rangle_B$  は  $L^2(\Omega, \mu)$   
 に属す。従って,  $\langle f|g \rangle = \int_{\Omega} \langle f|g \rangle_B d\mu$  によって, スカラー  
 $\langle f|g \rangle$  が得られるが, これは右側の内積となつて,  $H^2$  が  
 Hilbert 空間になることが示される。この時,  $\mathcal{D}^{(B)}$  のスカラー  
 $\mathbb{C}^{(B)}$  の  $H^2$  への作用は, 正規作用系となる, ことが示され,  
 特に,  $\mathbb{C}_{\infty}^{(B)}$  は  $H^2$  上の可換 von Neumann 環として作用して  
 いることがわかる。従って,  $L^{\infty}(\Omega, \mu)$  は,  $H^2$  上の可換 von Neumann  
 環に表現される。そこで, 問題は, この作用の仕方がどうな  
 っているかを知ること, これは, 重複度理論の目的である。  
 ここで, この問題は,  $H$  の  $\mathcal{D}^{(B)}$  における次元が  $\infty$  である  
 ということから完全に定まることがわかる。これは測度代数  $B$   
 の単位の分解であり,  $H^2$  の射影で表現されているので,  
 $\{b_i\}$  に対応して,  $H^2$  の  $\mathbb{C}_{\infty}^{(B)}$  の作用に関する不変部分空間の  
 直交族  $\{H_i\}$  が得られ, 各  $H_i$  上では, この作用は  $L^{\infty}(\Omega, \mu)$   
 の一様重複度の表現となる。従って, 一様重複度の  
 作用が定まるわけであるが, 左側はこれを  $\{b_i\}$  に従っ  
 てつなげておいたものと理解される。ここで, これはつまり  
 $\dim(H) = \infty$  の場合がわかっているという事である。最も  
 簡単な場合である  $\dim(H) = 1$  の場合は,  $L^{\infty}(\Omega, \mu)$  が  $L^2(\Omega, \mu)$   
 上に掛け算作用系として作用している作用の仕方は  $1$  である。

同値である。  $\dim(H) = \aleph$  はこの作用の  $\aleph$  個の直和になり、  
 いる事がわかる。つまり、  $\dim(H) = \aleph$  の時、Hilbert 空間  
 $H^{(\aleph)}$  は  $\underbrace{L^2(\Omega, \mu) \oplus \cdots \oplus L^2(\Omega, \mu)}_{\aleph \text{ 回}}$  と同型で、  $H^{(\aleph)}$  における  
 $\mathcal{C}_0^\infty$  の作用は右  $L^2(\Omega, \mu)$  に同じ可測関数を掛ける掛り算作用  
 になっている。行列で表現すれば  $\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}$  ( $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ )  
 と表現できる。この様な作用と一様重複度  $\aleph$  の表現と一致。  
 以上の内容はつまり、  $\mathcal{C}_0^\infty$  の  $H^{(\aleph)}$  に対する作用は、重複度関  
 数が  $\dim(H)_B$  であるような  $L^\infty(\Omega, \mu)$  の作用と一致する同値  
 であるという事である。

それでは、陽うに与えられた正規作用素の重複度理論を  $\mathcal{V}^{(B)}$   
 の次元論に帰着させる方法を考えよう。そのためには、この  
 正規作用素の作用と  $\mathcal{V}^{(B)}$  の Hilbert 空間のスカラー一倍の作用で  
 表現してやればよい。  $H$  を通常の Hilbert 空間、  $A$  を  $H$  上の  
 一つの正規作用素とする。  $A$  のスペクトルを  $Sp(A)$  とし、そ  
 の上の連続関数環  $C(Sp(A))$  (無限遠で 0 になる連続関数の左  
 体) の第 2 共役空間をとると、これは可換 von Neumann 環  
 の構造をもつ。これは  $Sp(A)$  上の有限測度左体のつくった  
 Banach 空間の共役空間で、その射影元の左体を  $B$  とすると、  
 $B$  は完備 Boolean 代数で、  $Sp(A)$  上の有限測度の絶対連続性の同値  
 類のつくる完備 Boolean 環を稠密に含む(1)。 (Halmos [3])  
 では重複度関数の定義の後者を利用している。) この時、

$A$  から生成される von Neumann 環はその正規表現の像に等しい。以下簡単のため、この両者を同一視して話を進めよう。そのスベクトルを利用して、ある測度空間  $(\Omega, \mu)$  を構成して、 $\mathcal{Z} \cong L^\infty(\Omega, \mu)$  とできる。この時、 $B$  はこの測度代数と同型になる。この  $B$  を用いて、 $\mathcal{U}^{(B)}$  を構成する。次に、 $\mathcal{H}$  を  $\mathcal{U}^{(B)}$  の中の構造とみなせるようにする。 $\mathcal{C}_\infty^{(B)}$  と  $\mathcal{Z}$  は同型なので、 $\mathcal{Z}$  は  $\mathcal{U}^{(B)}$  の複素数体とみなせる。従って、 $\mathcal{H}$  は  $\mathcal{U}^{(B)}$  の複素線型空間とみなせる。次に、 $\mathcal{U}^{(B)}$  における内積を構成する。 $\mathcal{H}$  が本来持つ内積は  $\mathcal{C}$  に対して線型であるが、 $\mathcal{C}_\infty^{(B)}$  に対して線形であるから新しく定義しなくてはならない。 $\mathcal{H}$  のベクトル  $\xi, \eta$  に対して、 $\mu_{\xi, \eta}(b) = \langle b\xi | \eta \rangle$  ( $b \in B$ ) という関数  $\mu_{\xi, \eta}$  を考え、 $\mu$  に関して絶対連続な  $B$  上の符号付測度である。そこで、Radon-Nikodym の定理から  $\langle \xi | \eta \rangle_B = d\mu_{\xi, \eta} / d\mu$  とおくと  $\langle \xi | \eta \rangle_B \in L^1(\Omega, \mu)$  となってしまう。 $\mathcal{C}^{(B)}$  は  $\Omega$  上の可測関数からなっているから、 $\langle \xi | \eta \rangle_B \in \mathcal{C}^{(B)}$  である。この  $\langle \xi | \eta \rangle_B$  は  $\mathcal{C}^{(B)}$ -値の内積<sup>(の性質)</sup>をもつ事を示すことが出来る。但し、一つだけ注意が必要。それは、 $\langle \xi | \xi \rangle_B = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$  という性質があるが、これは  $\mathcal{U}^{(B)}$  を見ると  $\llbracket \langle \xi | \xi \rangle_B = 0 \rrbracket = \llbracket \xi = 0 \rrbracket$  でありかねない。そのため、 $\mathcal{H}$  のベクトルの間の相等関係を  $\mathcal{Z}$ -値から  $B$ -値に修正しなくてはならない。それには、上記の関係が成立するよ

うに定めればよいので,  $[\xi = \eta] = [\langle \xi - \eta | \xi - \eta \rangle_B = 0]$  として  
 $[\xi = \eta]$  が定められる。ところが,  $\mathcal{D}^{(B)}$  の元の定義は直接  
 に  $\mathcal{D}^{(B)}$  の内積関係から定義して, 相等関係は後から課する。すなわち,  
 望みの相等関係を実現するために次のように考  
 える。集合論で相等関係と内積関係に帰着する方法として同  
 値類の考え方があつたので, それを利用する。つまり,  $\xi, \eta$   
 を考えた代りに, それぞれの同値類  $[\xi], [\eta]$  を考える。すると  
 $[\xi] = [\eta] \Leftrightarrow \eta \in [\xi]$  が成立して, 相等関係が内積関係  
 系に帰着しやす。つまり,  $[[\xi] = [\eta]] = [\langle \xi - \eta | \xi - \eta \rangle_B = 0]$   
 $= [\eta \in [\xi]]$  となればよいから,  $H$  の元と  $\mathcal{D}^{(B)}$  の元とを  
 定義するに, 各ベクトル  $\xi \in H$  に対して,  $\text{dom}(\tilde{\xi}) = \{\eta \in H \mid$   
 $\langle \xi - \eta | \xi - \eta \rangle_B = 0\}$  と定義すればよい。  
 このとき,  $\tilde{H} = \{\tilde{\xi} \mid \xi \in H\} \times \{1\}$  とすれば,  $H$  のレガリカで,  
 望みの相等関係をもつ  $\mathcal{D}^{(B)}$  の元  $\tilde{H}$  を定義するこゝがでる。  
 このようにして,  $H$  から  $\mathcal{D}^{(B)}$  の Hilbert 空間  $\tilde{H}$  が構成される。  
 あるいは,  $\tilde{H}$  に対して前述の  $\mathcal{D}^{(B)}$  における Hilbert 空間論を適用  
 すれば,  $A$  と  $H$  に関する重複度理論が得られる。何故ならば,  
 構成の仕方から,  $\tilde{H}$  の  $H$  に対する作用は  $\mathcal{C}_B^{(B)}$  の  $\tilde{H}_2^{(B)}$  に対する  
 作用と等しい同値であり,  $\mathcal{C}_B^{(B)}$  の  $\tilde{H}_2^{(B)}$  に対する作用は,  $\tilde{H}$  の  
 $\mathcal{D}^{(B)}$  における次元  $\dim(\tilde{H})_B$  で完全に記述されている。つまり,  
 $\dim(\tilde{H})_B$  が  $A$  の  $H$  上の作用のスペクトル重複度関数で

ある、2, 完全な  $\mathcal{U}$  は  $\mathcal{U}$  不変量になっている。この事は、次元が Hilbert 空間の完全な不変量であるという最も基本的な定理を  $\mathcal{U}^{(1)}$  で解釈することにより、重複度理論の基本定理が得られる事を示している。

### 3. Von Neumann 環と因子環

$H$  を Hilbert 空間とする。 $H$  上の有界作用素の集合  $S$  に対して  $S$  の交換子  $S'$  とは、 $S$  のすべての元と可換な有界作用素の全体である。 $H$  上の有界作用素からなる自己共役複素線型環  $M$  が  $M'' = M$  を満たす時、 $H$  上の von Neumann 環とよばれる。 $M' \cap M$  を  $M$  の中心と書く、中心が 1 次元、*i.e.*  $M' \cap M = \mathbb{C}I$  の時、因子環とよばれる。von Neumann 環  $M$  の射影元  $p, q$  に対して、 $pq = q$  の時、 $q \leq p$  と定義する。また、 $u^*u = p$   $uu^* = q$  となる  $M$  の元  $u$  が存在する時、 $p$  と  $q$  は同値であるといわれ  $p \sim q$  と書く。射影元  $p \in M$  が、任意の射影元  $q$  に対して、 $p \sim q \leq p$  ならば  $p = q$  となる時、 $p$  は有限であるといわれる。 $M$  が  $H$  上の有界作用素の全体の時、 $p$  が有限である事は、 $p$  が有限次元の値域をもつ事と同等である。この時、 $p \sim q$  は、値域の間  $\mathbb{C}$  により作用素が存在する事で、 $p$  の値域と  $q$  の値域が等しい次元をもつ事を意味し、 $q \leq p$  は  $q$  の値域が  $p$  の値域の閉部分空間である事を意味する。従って、

$\mathcal{P}$  の値域の正規直交基底は  $p$  の値域の正規直交基底の等端度の部分集合であるが、これから両者が等しいことが含意されるということは、 $p$  の値域の正規直交基底が有限集合であることを意味するからである。 $M$  の射影元は、 $pMp$  が可換になる時、可換 (abelian) と呼ばれる。可換射影はすべて有限である。可換射影をもつ因子環は I 型と呼ばれる、可換射影をもたず有限射影をもつ因子環は II 型、有限射影をもたない因子環は III 型と呼ばれる。(但し、零射影の除いて考える。)

von Neumann 環に対する型の定義のもう少し複雑である。

von Neumann 環  $M$  の中心に属する射影元全体を  $B$  とすると、 $B$  は完備 Boolean 代数である。 $M$  は、任意の  $p \in B$  に対して、 $q \leq p$  とする可換射影  $q$  が存在する時、I 型と呼ばれる、可換射影が存在しないが、任意の  $p \in B$  に対して、 $q \leq p$  とする有限射影  $q$  が存在する時、II 型と呼ばれる。有限射影が存在しない時、III 型と呼ばれる。この意味は、 $B$  を forcing condition の集まりと考えると、任意の  $p \in B$  が「I 型である」という条件を force する時  $M$  が I 型であると定義しているからである (他の型も同様)。

この様に、von Neumann 環の理論は因子環の理論と中心に關する forcing language で翻訳しなおすことになる。この事と  $\mathcal{D}^{(B)}$  を用いて正確に記述しよう。詳しくは、Takeuti [13] を参照せよ。

$H \in \mathcal{V}^{(B)}$  における Hilbert 空間,  $M \in \mathcal{V}^{(B)}$  における  $H$  上の  
 因子環とする。  $B$  は前節の様に測度代数として,  $Z$  も前節と  
 同様とする。前節で示したように,  $H$  から  $\mathcal{V}$  の Hilbert 空間  
 $H_2^{(B)}$  を構成することかである。さて,  $M$  の元は  $H$  に作用して  
 $H$  から  $H_2^{(B)}$  にも作用して  $H$  と考えられる。そこで,  $M_\infty^{(B)}$   
 $= \{x \in M^{(B)} \mid \exists r \in \mathbb{R} \ [ \|x\|_B \leq r ] = 1 \}$  とすると,  $x \in M_\infty^{(B)}$  の  
 $H_2^{(B)}$  上の作用は有界作用素で,  $M_\infty^{(B)}$  は  $H_2^{(B)}$  上の von Neumann  
 環になる。  $M_\infty^{(B)}$  が自己共役線型環であることは,  $M$  の  
 $\mathcal{V}^{(B)}$  における対応する性質から得られ, また,  $[M'' = M] = 1$   
 から,  $M_\infty^{(B)''} = M_\infty^{(B)}$  が得られる。この時,  $M$  が  $\mathcal{V}^{(B)}$  で因子環  
 であるからその中心は  $\mathbb{C}^{(B)}$  であり,  $Z = \mathbb{C}_\infty^{(B)}$  であるから,  
 $M_\infty^{(B)}$  の中心は  $Z$  と同型になる。従って,  $\mathcal{V}^{(B)}$  の因子環  $M$  に対  
 して  $M_\infty^{(B)}$  は中心が  $Z$  の von Neumann 環になることが示される。

逆に,  $M$  は Hilbert 空間  $H$  上の  $\mathcal{V}$  における von Neumann 環で,  
 中心が  $Z$ , その射影元の全体を  $B$  とする。前節の構成に従っ  
 て,  $Z$  と  $B$  を用いて,  $\mathcal{V}^{(B)}$  の Hilbert 空間  $\tilde{H}$  をつくり,  $\mathbb{C}_\infty^{(B)}$   
 $\cong Z$  とすることかである。この時,  $x \in M$  に対して,  $Z$  の  $\mathcal{V}^{(B)}$   
 での作用  $\tilde{x}: \tilde{\xi} \rightarrow x\tilde{\xi}$  を考えれば, これは  $\tilde{H}$  上の有界線型  
 作用素になる。  $\tilde{M} = \{ \tilde{x} \mid x \in M \} \times \{ 1 \}$  とすると,  $\tilde{M}$  は  
 $\mathcal{V}^{(B)}$  における  $\tilde{H}$  上の因子環である。そこで, 前述の構成とく  
 り直ると,  $\tilde{M}_\infty^{(B)}$  は  $\tilde{H}_2^{(B)}$  上の von Neumann 環になり, この時,

$\tilde{M}_\infty^{(B)}$  の  $\tilde{H}_\infty^{(B)}$  上の作用は  $M$  の  $H$  上の作用と  $\mathbb{C}$  により同値になる。  
 以上の事から、次の結論が得られる。  $M$  を Hilbert 空間  $H$  上の  
 von Neumann 環で、その中心  $Z$  の射影の全体を  $B$  とすると、  
 $\mathcal{U}^{(B)}$  において、Hilbert 空間  $\tilde{H}$  と因子環  $\tilde{M}$  が存在し、 $M \simeq$   
 $M_\infty^{(B)}$  の作用は  $\mathbb{C}$  により同値である。従って、任意の von Neumann  
 環は  $\mathcal{U}^{(B)}$  の因子環から得られるので、von Neumann 環に関する  
 定理は因子環に関する定理の  $\mathcal{U}^{(B)}$  で、解釈として得られる。  
 この移行原理において、型の概念が絶対的である事は von  
 Neumann 環の型の定義が一種の forcing language で述べられて  
 いることから示される。実際、von Neumann 環  $M$  が I 型  
 $\Leftrightarrow \exists p \in B$  [因子環  $\tilde{M}$  が I 型]  $\Leftrightarrow p \Leftrightarrow$  [因子環  $\tilde{M}$  が I 型]  $= 1$   
 が成立する。他の型についても同様である。

さて、この型の絶対性を用いて、I 型 von Neumann 環の構  
 造定理を導くことが出来る。  $M$  を I 型 von Neumann 環とする。  
 $B$  を  $M$  の中心に属する射影の全体とする。  $M$  から  $\mathcal{U}^{(B)}$  の因子  
 環  $\tilde{M}$  を構成すると、[ $\tilde{M}$  は I 型]  $= 1$  である。一方、因子環論  
 から、I 型の因子環はある Hilbert 空間  $H$  上の有界作用素の全  
 体  $\mathcal{L}(H)$  と同型であるから、 $\exists H \in \mathcal{U}^{(B)}$  [  $H$  は Hilbert 空間 ]  
 で  $\tilde{M} \simeq \mathcal{L}(H)$   $= 1$  が成立する。従って、 $M \simeq \mathcal{L}(H)_\infty^{(B)}$  となる。  
 そこで、 $\dim(H)_B = \sum \lambda_i e_i$  と  $H$  の次元を  $\mathcal{U}^{(B)}$  で分解する  
 と、この分解が  $M$  の構造を決定する。やはり  $M$  の中心的射影



元からなる単位の分解なので,  $e_\alpha M$  は  $M$  の直和因子であり,  
 $M \cong \sum e_\alpha M$  と直和分解される。各直和因子  $e_\alpha M$  は,  $H$  の  
 $e_\alpha$  の部分と不変に 1, 2, ...,  $\infty$ ,  $\llbracket \dim(H)_\beta = \check{\alpha} \rrbracket = e_\alpha$  であり  
 から,  $H_\alpha = e_\alpha H$  とすれば,  $e_\alpha M \cong \mathcal{L}(H_\alpha)_{\infty}^{(B)}$  であり,  $H_\alpha$   
 は前節で示した様に  $e_\alpha Z$  が一様重複度  $\alpha$  で作用している。  
 結局,  $\mathcal{L}(H_\alpha)_{\infty}^{(B)}$  は  $e_\alpha Z$  の  $\alpha \times \alpha$  行列環  $M_\alpha(e_\alpha Z)$  と同型であ  
 ることを示すことができて,  $M \cong \sum_\alpha M_\alpha(e_\alpha Z)$  が成り立つ。  
 可換 von Neumann 環の  $\alpha \times \alpha$  行列環と同型の von Neumann 環を  
 homogeneous 環と呼ぶ。その degree を示す。従って, I 型 von  
 Neumann 環は一意的に定まる degree をもつ homogeneous 環に直  
 和分解されることになる。そこで, homogeneous 環の degree  
 の一意性は,  $M_\alpha(Z) \cong M_\beta(Z) \Leftrightarrow \llbracket \mathcal{L}(l^2(\check{\alpha})) \cong \mathcal{L}(l^2(\check{\beta})) \rrbracket = 1$   
 $\Leftrightarrow \llbracket l^2(\check{\alpha}) \cong l^2(\check{\beta}) \rrbracket = 1 \Leftrightarrow \llbracket \text{card}(\check{\alpha}) = \text{card}(\check{\beta}) \rrbracket = 1$   
 $\Leftrightarrow \llbracket \check{\alpha} = \check{\beta} \rrbracket = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$  から得られる。従って, この分解は  
 一意であり, それに現われる degree の組は同型の不変量にな  
 る。

#### 4. I 型 $AW^*$ -環の構造

これから, 重複度理論と I 型 von Neumann 環の構造理論が,  
 $\mathcal{H}^{(B)}$  の Hilbert 空間の次元論とどうかわかっていられるかを見てい  
 たい。そこでは,  $\mathcal{H}$  の基底概念が  $\mathcal{H}^{(B)}$  の基底を用いて, それら

の構造を表わす指標に於ける過程が明らかになつたであらう。  
 この理論では、 $B$  は常に測度代数であつたから、 $\mathcal{U}^{(B)}$  の  
 基数は絶対的であり、従つて、 $\mathcal{U}^{(B)}$  の基数を考へる代りに、  
 $\mathcal{U}$  の基数と  $B$  の単位の分解の組を考へる事により全く同じ得  
 刻を果たすことができた。この事が、 $\mathcal{U}^{(B)}$  が知られる以前に  
 この理論が成功した理由である。ところで、von Neumann  
 環から  $AW^*$ -環へ移行すると、 $B$  はもう測度代数とは限らな  
 い。従つて、 $\mathcal{U}^{(B)}$  の基数概念と、 $\mathcal{U}$  の基数と  $B$  の単位の分解  
 で代用するところの理論には限界が現われる。 $\mathcal{U}^{(B)}$  の基数に  
 は cardinal collapsing という現象が現われなくてはならず、 $\mathcal{U}$   
 の基数を不変量にすることができなくなるという事が、 $AW^*$ -  
 環の I 型理論の挫折の原因である。また、 $AW^*$ -環の場合には、  
 $\mathcal{U}$  における Hilbert 空間への部分の良き表現 ( $M''=M$  となる  
 うな) が存在しなくなるので、事態は更にや、かいである。  
 従つて、この問題をやり方で  $\mathcal{U}^{(B)}$  に存在物を構成すること  
 できなくなるので新しい構成法が必要となる。しかし、事態の  
 本質は変わらないので、I 型  $AW^*$ -環は  $\mathcal{U}^{(B)}$  の Hilbert  
 空間の I 型有界作用素の全体として表現することができ、こ  
 の Hilbert 空間の次元である  $\mathcal{U}^{(B)}$  の基数が同型の不変量を  
 構成することばかりの事である。議論は、更に専門的にな  
 りて詳細は Ozawa [9] に譲つて、 $\mathcal{U}^{(B)}$  の側から基数概念の破れ

を簡単に眺めるとこれである。

$B$  を任意の完備 Boolean 代数とし、 $H$  を  $\mathcal{D}^{(B)}$  の Hilbert 空間、 $\mathcal{L}(H)$  を  $\mathcal{D}^{(B)}$  の  $H$  上の有界作用素の全体とする。まず、 $B$  上に測度が存在しない場合があるから、 $H$  の Hilbert 空間  $H_2$  を構成するとこれが成り立つことは容易である。一方、 $\mathcal{C}_\infty^{(B)}$  は

$B$  の Stone 表現空間上の連続関数の全体と同型で、可換  $AW^*$ -環になる。そこで、 $\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)} = \{x \in \mathcal{L}(H)^{(B)} \mid \exists r \in \mathbb{R}, \forall \|x\| \leq r, \|x\| = 1\}$

を考えると、これは I 型  $AW^*$ -環になる。von Neumann 環になるための必要十分条件は、 $B$  上に十分多くの測度が存在することである。 $H$  の  $\mathcal{D}^{(B)}$  での次元は  $\dim(H)_B = \sum \lambda_i$  となる。従って、前節と同様に、 $\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)} \cong \sum M_d(\mathbb{C}(Z))$  (但し、 $Z \subseteq \mathcal{C}_\infty^{(B)}$ ) が成立する。従って、I 型  $AW^*$ -環は homogeneous  $AW^*$ -環に直和分解される。問題は、この分解の仕方と  $\mathcal{D}$  の基数概念で指定できるかということである。 $\dim(H)_B = \sum \lambda_i$  という簡単な場合を先として扱う。この時、 $\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)} \cong M_\lambda(Z)$  となる。ここで

が、この基数  $\lambda$  は I 型  $AW^*$ -環  $\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)}$  の構造と不可分指標になる場合がある。例えば、 $\lambda = \sum \lambda_i$  で  $\prod \lambda_i = \lambda$  となるようにする。このとき、 $\mathcal{L}(H)_\infty^{(B)}$  は  $\alpha$  番目の同型類に属するか、 $\beta$  番目の同型類に属するかという問題が生じる。 $\alpha$  が有意味なことは、構造の  $\mathcal{D}$  の基数で記述できる事になるが、 $\alpha$  が無意味で  $\beta$  が有意味なことは、もちろん、この構造は  $\mathcal{D}$  の基数では記述できない

くて,  $\mathcal{V}^{(B)}$  の基数で記述するべきものなりである。結論は,  
 I型  $AW^*$ -環の構造を決定する指標は  $\mathcal{V}^{(B)}$  の基数であり,  $\mathcal{Z}, \mathcal{V}$   
 の基数であり,  $\mathcal{Z} \cup \mathcal{V}$  である。  $\mathcal{V}$  の  $\aleph_1$  の無限基数  $\aleph_1$  に入  
 り,  $\text{forcing}$  の議論で知られてゐる通りに, ある完備  
 Boolean 代数  $B$  が存在して,  $\llbracket \text{card}(\check{K}) = \text{card}(\check{\lambda}) \rrbracket = 1$  である。  
 この  $\mathcal{V}^{(B)}$  の Hilbert 空間  $H_\lambda = \ell^2(\check{\lambda})$ ,  $H_K = \ell^2(\check{K})$  に対して,  
 この I型  $AW^*$ -環  $\mathcal{L}(H_\lambda)^{(B)}$ ,  $\mathcal{L}(H_K)^{(B)}$  をつくる。すると,  
 $\mathcal{L}(H_\lambda)^{(B)} \cong M_\lambda(\mathcal{Z})$ ,  $\mathcal{L}(H_K)^{(B)} \cong M_K(\mathcal{Z})$  が示される。一方,  
 $\llbracket \ell^2(\check{K}) \cong \ell^2(\check{\lambda}) \rrbracket = 1$  かつ  $\llbracket \dim(\ell^2(\check{K})) = \text{card}(\check{K}) \rrbracket = 1$  等  
 から得られるので,  $\mathcal{L}(H_\lambda)^{(B)} \cong \mathcal{L}(H_K)^{(B)}$  である。従って,  
 この  $B$  に対して,  $\mathcal{Z} = \mathbb{C}^{(B)}$  である。  $\mathcal{Z}$  の  $\lambda \times \lambda$  行列環と  $K \times K$   
 行列環は同型である。つまり,  $\mathcal{Z}$  の行列環の同型の指標は,  
 $\text{card}(\check{\lambda})$  の方である。

それでは,  $\mathcal{V}^{(B)}$  の基数を用いて, I型  $AW^*$ -環の完全な不変量  
 を構成するにはどうすればよいのかという事にしても,  
 Ozawa [9] を参照した。また,  $AW^*$ -環の理論と  $\mathcal{V}^{(B)}$  の因子  
 環の理論の関係については Ozawa [11] に詳しく述べられてゐる。  
 更に, 理論の代数的展開については, Eda [2] に詳しく  
 述べられてゐる。そこで, 自己単射的正规環の次元論に,  
 前述の  $AW^*$ -環にかけることも同様の事態が起る事が示され  
 てゐる。

## References.

- [1] Berberian, S. K., Baer  $\ast$ -rings, Springer, Berlin, 1972.
- [2] Eda, K., Maximal quotient rings and Boolean extensions, preprint.
- [3] Halmos, P. R., Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, New York, 1951.
- [4] Jech, T., Set Theory, Academic Press, New York, 1978.
- [5] Kaplansky, I., Algebras of type I, Ann. of Math., 56 (1952), 460-472.
- [6] Kaplansky, I., Modules over operator algebras, Amer. J. Math., 75 (1953), 839-858.
- [7] Ozawa, M., Boolean valued interpretation of Hilbert space theory, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 609-627.
- [8] Ozawa, M., Boolean valued analysis and type I  $AW^*$ -algebras, Proc. Japan Acad., 59 A (1983), 368-371.
- [9] Ozawa, M., A classification of type I  $AW^*$ -algebras and Boolean valued analysis, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [10] Ozawa, M., Non-uniqueness of the cardinality attached to homogeneous  $AW^*$ -algebras, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [11] Ozawa, M., A transfer principle from von Neumann algebras to  $AW^*$ -algebras, to appear in J. London Math. Soc.
- [12] Takeuti, G., Two applications of logic to mathematics, Iwanami and Princeton University Press, Tokyo and Princeton, 1978.
- [13] Takeuti, G., Von Neumann algebras and Boolean valued analysis, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 1-21.
- [14] Takeuti, G. and Zaring, W. M., Axiomatic set theory, Springer, Heidelberg, 1973.
- [15] Topping, D. M., Lectures on von Neumann algebras, Van Nostrand, London, 1971.